

TEMA 9: ESPACIO AFÍN

Definición (Espacio afín)

(A, V, ψ) es un espacio afín si:

- i) $A \neq \emptyset$ A es un conjunto de puntos
- ii) V es un K -espacio vectorial de dimensión finita ($\dim A \stackrel{\text{def}}{=} \dim V$)
- iii) $\psi: A \times A \rightarrow V$ ($\psi(p, q) \in V, \forall p, q \in A$) $\psi(p, q) = \overrightarrow{pq}$ es el vector que va de p a q
- iv) $\psi(p, q) = \psi(p, r) + \psi(r, q)$
- v) $\forall p \in A, \psi_p: A \rightarrow V$ dada por $\psi_p(q) = \psi(p, q)$ es biyectiva

$$A = K^n$$

$$V = K^n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)_{B_C} \\ p = (a_1, \dots, a_n) \\ q = (b_1, \dots, b_n) \end{array} \right.$$

(A, V, ψ) es un espacio afín

$$\psi(p, r) + \psi(r, q) = (c_1 - a_1, \dots, c_n - a_n)_{B_C} + (b_1 - c_1, \dots, b_n - c_n)_{B_C} = (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)_{B_C}$$

Veamos ψ_p inyectiva

$\psi(p, q)$

$$\psi_p(q) = \psi_p(r) = (c_1 - a_1, \dots, c_n - a_n)_{B_C}$$

$$(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)_{B_C} \Rightarrow c_i - a_i = b_i - a_i, \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow q = r$$

Veamos ψ_p suprayectiva

$$v = (x_1, \dots, x_n)_{B_C}$$

$$v = \psi_p(a) = \psi(p, a) \Rightarrow (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)_{B_C} = (x_1, \dots, x_n)_{B_C} \Rightarrow b_i - a_i = x_i, \forall i = 1, \dots, n$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$\dim V = 2 \Rightarrow$ Plano afín

$\psi(v, w) = w - v \Rightarrow (A, V, \psi)$ es un espacio afín

Estructura de las soluciones de un sistema

Sea Σ sistema de ecuaciones lineales (no necesariamente homogéneo)

$$\Sigma(K) \subseteq K^n, \Sigma_0 \text{ sistema homogéneo asociado, } \Sigma_0(K) \subseteq K^n$$

$$\text{Si } \Sigma(K) \neq \emptyset \implies \Sigma(K) = (a_1, \dots, a_n) + \Sigma_0(K)$$

$$A = \Sigma(K), V = \Sigma_0(K), \psi((a_1, \dots, a_n) + v, (a_1, \dots, a_n) + w) = w - v$$

$$\implies (A, V, \psi) \text{ es un espacio afín}$$

Proposición

$$i) \vec{pp} = \vec{0}$$

$$ii) \vec{qp} = -\vec{pq}$$

$$iii) \vec{pq} = \vec{rs} \iff \vec{pr} = \vec{qs} \quad \text{Regla del paralelogramo}$$

Dem.

$$i) \vec{pp} + \vec{pp} = \vec{pp} \implies \vec{pp} = \vec{0}$$

$$ii) \vec{pq} + \vec{qp} = \vec{pp} = \vec{0} \implies \vec{pq} = -\vec{qp}$$

$$iii) \implies \vec{pr} = \vec{pq} + \vec{qr} = \vec{rs} + \vec{qr} = \vec{qs}$$

$$\longleftarrow \vec{pq} = \vec{pr} + \vec{rq} = \vec{qs} + \vec{rq} = \vec{rs}$$

$$\vec{pq} = v \in V \implies p + v \stackrel{\text{def}}{=} q : A \times V \rightarrow A$$

$(p, v) \mapsto p + v = q$, donde $q \in A$ es el único punto tal que $v = \vec{pq} = \psi_p(q)$

Propiedades

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\text{iii) } \forall p \in A \Rightarrow (\forall q \in A), \exists v \in V \text{ tal que } p+v=q$$

Notación

$(V, +)$ grupo, $(V, +)$ es una acción sobre A fiel (inyectiva) y transitiva

$$q-p = \overrightarrow{pq}$$

$$(q-p) + (r-q) = r-p = \overrightarrow{pr}$$

Definición (Variedad afín)

Sea $p \in A, W < V$

$p+W = \{p+w, w \in W\}$ es la variedad afín que pasa por p con dirección W .

OBS

$(X = p+W, W, \varphi |_{X \times X})$ es espacio afín

Dem.

$$p = p+0 \in X$$

$W \in v.$

$$\varphi |_{X \times X} : X \times X \rightarrow V$$

$$\varphi_{q,r} = \varphi(p+w_1, p+w_2) = \varphi(p+w_1, p+w_1+(w_2-w_1)) = w_2-w_1 \in W$$

$$q \in X \Rightarrow \varphi_q : X \rightarrow W \text{ ¿biyectiva?}$$

φ_q es inyectiva

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$\varphi(p,q)$
 $\varphi_{p,q} = w \in W$

Proposición

$X = p + W$ variedad afín. Entonces:

i) $X = q + W, \forall q \in X$ \overrightarrow{X} Vectores con origen y extremo en X

ii) $W = \{ \overrightarrow{pq}, q \in X \} = \{ \overrightarrow{qr}, q, r \in X \}$
 $\overrightarrow{pX} \leftarrow$ Vectores con origen en p y extremo en X

Dem.

i) Veamos $p + W \subseteq q + W$ (el recíproco es análogo)

$$p + W = q + (\overrightarrow{qp} + W) \in q + W, \text{ pues } \overrightarrow{qp} \in W, \text{ porque } q \in X \Rightarrow q = p + w'$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{pq} = w'$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{qp} = -w' \in W$$

ii) $\overrightarrow{pX} \subseteq \overrightarrow{X} \quad \overrightarrow{X} \subseteq W?$

$$\overrightarrow{qr} = \overrightarrow{qp} + \overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pr} - \overrightarrow{pq} = w - w' \in W$$

\uparrow
 $r = p + \overrightarrow{pr}$

$\overrightarrow{W} \subseteq \overrightarrow{pX}?$

$$w \in W \Rightarrow q = p + w \in X \Rightarrow w = \overrightarrow{pq} \in \overrightarrow{pX}$$

Definición (Posiciones relativas)

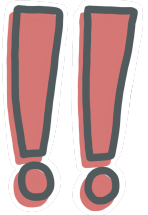
Supongamos X_1, X_2 variedades de (A, V, φ)

X_1 y X_2 $\left\{ \begin{array}{l} \text{se cortan (son secantes) si } X_1 \cap X_2 \neq \emptyset \\ \text{son paralelas si } \overrightarrow{X_1} \subseteq \overrightarrow{X_2} \text{ o } \overrightarrow{X_2} \subseteq \overrightarrow{X_1} \end{array} \right.$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Proposición

$$X_1, X_2 \text{ variedades} \begin{cases} X_1 \cap X_2 = \emptyset \implies X_1 \cap X_2 \text{ no es variedad} \\ X_1 \cap X_2 \neq \emptyset \implies X_1 \cap X_2 \text{ es variedad} \end{cases}$$

$$p \in X_1 \cap X_2 \implies X_1 \cap X_2 = p + (\vec{X}_1 \cap \vec{X}_2), \quad \overrightarrow{X_1 \cap X_2} = \vec{X}_1 \cap \vec{X}_2$$

Dem.

$$\begin{cases} p \in X_1 \implies X_1 = p + \vec{X}_1 \supseteq p + (\vec{X}_1 \cap \vec{X}_2) \\ p \in X_2 \implies X_2 = p + \vec{X}_2 \supseteq p + (\vec{X}_1 \cap \vec{X}_2) \end{cases} \implies X_1 \cap X_2 \supseteq p + (\vec{X}_1 \cap \vec{X}_2)$$

$$q \in X_1 \cap X_2 \implies q = \begin{cases} p + w_1 = p + \vec{p}q_1, & q_1 \in X_1 \\ p + w_2 = p + \vec{p}q_2, & q_2 \in X_2 \end{cases} \implies \begin{cases} q = q_1 \\ q = q_2 \end{cases} \xrightarrow{w_1 = w_2} q = p + w \in p + (\vec{X}_1 \cap \vec{X}_2)$$

$$\implies X_1 \cap X_2 \subseteq p + (\vec{X}_1 \cap \vec{X}_2)$$

$$\implies X_1 \cap X_2 = p + (\vec{X}_1 \cap \vec{X}_2), \quad \overrightarrow{X_1 \cap X_2} = \vec{X}_1 \cap \vec{X}_2$$

Proposición

$$X_1, X_2 \text{ variedades} \implies X_1 \cup X_2 \text{ no es variedad (por lo general)}$$

Definición (Suma de variedades)

$$\begin{cases} X_1 = p_1 + \vec{X}_1 \\ X_2 = p_2 + \vec{X}_2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} X_1 + X_2 \stackrel{\text{def}}{=} p_1 + \vec{X}_1 + \vec{X}_2 + L(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ccc} X_1 \subseteq X_1 + X_2 & & X_2 \subseteq X_1 + X_2 \\ \parallel & & \parallel \\ p_1 + \vec{X}_1 & p_1 + \vec{X}_1 + \vec{X}_2 + L(\vec{p}_1, \vec{p}_2) & p_2 + \vec{X}_2 \\ & & \parallel \\ & & p_1 + X_1 + X_2 + L(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \end{array}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$X_1 = p_1 + \vec{X}_1, \quad X_2 = p_2 + \vec{X}_2$$

$$X_1 + X_2 = p_1 + (\vec{X}_1 + \vec{X}_2 + L(\overrightarrow{p_1 p_2}))$$

Propiedades

$$X_1, X_2 \subseteq X_1 + X_2 \implies X_1 \cup X_2 \subseteq X_1 + X_2$$

Veamos $X_1 \cup X_2 \subseteq X$, X variedad $\implies X_1 + X_2 \subseteq X$ ($X_1 + X_2$ es la menor variedad que contiene a $X_1 \cup X_2$)

Dem.

$$p_1 \in X_1 + X_2$$

$$p_1 \in X_1 \subseteq X_1 \cup X_2 \subseteq X \implies p_1 \in X$$

$$X_1 \cup X_2 \subseteq X \implies \vec{X}_1, \vec{X}_2 \subseteq \vec{X}$$

$$\vec{X} = \{p_1 q_1, p_1 q_2 \in X\}$$

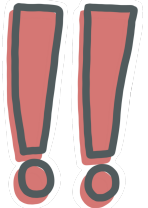
$$p_1 \in X_1, p_2 \in X_2 \implies p_1, p_2 \in X_1 \cup X_2 \implies p_1, p_2 \in X \implies \overrightarrow{p_1 p_2} \in \vec{X}$$

$$\implies p_1 + (\vec{X}_1 + \vec{X}_2 + L(\overrightarrow{p_1 p_2})) \subseteq X \implies \underline{X_1 + X_2 \subseteq X}$$

Proposición

$$X_1 = p_1 + \vec{X}_1, \quad X_2 = p_2 + \vec{X}_2$$

$$X_1 \cap X_2 \neq \emptyset \iff \overrightarrow{p_1 p_2} \in \vec{X}_1 + \vec{X}_2$$



Dem.

$$\implies \quad p \in X_1 \cap X_2 \implies \overrightarrow{p_1 p_2} = \overrightarrow{p_1 p} + \overrightarrow{p p_2} \in \vec{X}_1 + \vec{X}_2$$

$$\impliedby \quad \overrightarrow{p_1 p_2} \in \vec{X}_1 + \vec{X}_2 \implies \overrightarrow{p_1 p_2} = \overrightarrow{p_1 a_1} + \overrightarrow{a_2 p_2}, \quad a_1 \in X_1, a_2 \in X_2$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\dim X = \dim \overrightarrow{X}$$

Teorema

X_1, X_2 variedades

$$\dim(X_1 + X_2) = \begin{cases} \dim X_1 + \dim X_2 - \dim X_1 \cap X_2, & \text{si } X_1 \cap X_2 \neq \emptyset \\ \dim X_1 + \dim X_2 + 1 - \dim(\overrightarrow{X_1 \cap X_2}), & \text{si } X_1 \cap X_2 = \emptyset \end{cases}$$

Dem.

• $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$: $X_1 \cap X_2$ es variedad y $\overrightarrow{X_1 \cap X_2} = \overrightarrow{X_1} \cap \overrightarrow{X_2}$

$$\begin{aligned} \dim(X_1 + X_2) &= \dim(\overrightarrow{X_1 + X_2}) = \dim(\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2} + L(\overrightarrow{p_1, p_2})) \\ &= \dim(\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}) = \underbrace{\dim \overrightarrow{X_1}}_{\substack{\uparrow \\ \overrightarrow{p_1, p_2} \in \overrightarrow{X_1 + X_2}}} + \underbrace{\dim \overrightarrow{X_2}}_{\substack{\uparrow \\ \overrightarrow{p_1, p_2} \in \overrightarrow{X_1 + X_2}}} - \underbrace{\dim(\overrightarrow{X_1} \cap \overrightarrow{X_2})}_{\substack{\uparrow \\ \overrightarrow{p_1, p_2} \in \overrightarrow{X_1 + X_2}}} \\ &= \dim X_1 + \dim X_2 - \dim(X_1 \cap X_2) \end{aligned}$$

• $X_1 \cap X_2 = \emptyset$: $\overrightarrow{p_1, p_2} \notin \overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}$

$$\begin{aligned} \dim(X_1 + X_2) &= \dim(\overrightarrow{X_1 + X_2}) = \dim(\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2} + L(\overrightarrow{p_1, p_2})) \\ &= \dim(\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}) + \dim L(\overrightarrow{p_1, p_2}) - \dim((\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}) \cap L(\overrightarrow{p_1, p_2})) \\ &= \dim \overrightarrow{X_1} + \dim \overrightarrow{X_2} - \dim(\overrightarrow{X_1} \cap \overrightarrow{X_2}) + 1 - \dim \{0\} \\ &= \underline{\dim X_1 + \dim X_2 + 1 - \dim(\overrightarrow{X_1} \cap \overrightarrow{X_2})} \end{aligned}$$

Ej: r, s rectas $\subseteq \mathbb{R}^3$, r y s se cruzan

$$r \cap s, r \cap s = \emptyset$$

$$3 \geq \dim(r+s) = \dim r + \dim s + 1 - \dim(\overrightarrow{r} \cap \overrightarrow{s}) = 1 + 1 + 1 - 0 = 3$$

$$\Rightarrow \dim(r+s) = 3 \Rightarrow r+s = p_0 + \overrightarrow{r+s} = p_0 + \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ej: \mathbb{R}^4 , π_1 y π_2 planos, π_1 y π_2 se cruzan

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset, \pi_1 \neq \pi_2, \dim(\overrightarrow{\pi_1} \cap \overrightarrow{\pi_2}) = 1 \quad \text{No podría ser 0}$$

$$4 \geq \dim(\pi_1 + \pi_2) = \dim \pi_1 + \dim \pi_2 + 1 - \dim(\overrightarrow{\pi_1} \cap \overrightarrow{\pi_2}) = 2 + 2 + 1 - 1 = 4$$

$$\Rightarrow \dim(\pi_1 + \pi_2) = 4 \Rightarrow \pi_1 + \pi_2 = \mathbb{R}^4$$

Definición (Sistema de referencia cartesiano)

(A, V, φ) espacio afín.

Fijemos $p_0 \in A$. Sea $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base de V .

Sea un $p \in A \Rightarrow \overrightarrow{p_0 p} = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n, x_i \in K$

Entonces $p = (x_1, \dots, x_n)_R$ son las coordenadas de p en

el sistema de referencia afín $R = \{p_0, B\}$

OBS

p_0 origen del sistema de referencia

Pues $\overrightarrow{p_0 p_0} = 0u_1 + 0u_2 + \dots + 0u_n = \vec{0} \Rightarrow p_0 = (0, \dots, 0)_R$ en cualquier base B .

Definición (Coordenadas en un sistema de referencia)

$R = \{p_0, B\}$, $p_0 \in A$, B base de V , $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

$p \in A \Rightarrow p = (x_1, \dots, x_n)_R \stackrel{\text{def}}{\iff} \overrightarrow{p_0 p} = (x_1, \dots, x_n)_B = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

Cambio de sistema de referencia

26/04/2021

$R' = \{p_0', B'\}$, $B' = \{x_1', \dots, x_n'\}_R$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & & & \\ \vdots & & & \\ a_n & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

\uparrow $M(R', R)$ \rightarrow v_i'

$$|M(R', R)| = 1 \cdot |M(B', B)| \neq 0 \Rightarrow \exists M(R', R)^{-1} = M(R, R')$$

Definición (Sistema de referencia afín)

$$n = \dim A$$

$\{p_0, \dots, p_n\}$ es sistema de referencia afín si $\{\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n}\}$ es base de V

$R = \{p_0, B = \{\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n}\}\}$ es sistema de referencia cartesiano

$R = \{p_0, B = \{v_1, \dots, v_n\}\}$ es sistema de referencia cartesiano

$\Rightarrow \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ es sistema de referencia afín

Definición (Puntos afinmente independientes)

$\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$, $m \leq n$, son afinmente independientes si $\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_m}$ son l.i.

(La independencia no depende de qué punto tomemos como origen)

Definición ($A(P)$)

$P = \{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ son $m+1$ puntos arbitrarios

llamamos $A(P) = p_0 + L(\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_m})$ Es la variedad afín más pequeña que contiene a todos los puntos.

$$\dim A(P) = \dim L(\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_m})$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ecuaciones cartesianas y paramétricas

Sea $X = q_0 + \vec{X}$ variedad afín, $q_0 \in X$, $\dim X = m$ ($\dim \vec{X} = m$), $m \leq n$, $p = n - m$

Sea $R = \{p_0, B\}$ sistema de referencia cartesiano

$$p_i = (x_1, \dots, x_n)_R, q_0 = (c_1, \dots, c_n)_R, \vec{q_0 p_i} = (x_1 - c_1, \dots, x_n - c_n)_B$$

$$p_i \in X \iff \vec{q_0 p_i} \in \vec{X} \iff \begin{cases} a_{11}(x_1 - c_1) + \dots + a_{1n}(x_n - c_n) = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}(x_1 - c_1) + \dots + a_{pn}(x_n - c_n) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = \underbrace{a_{11}c_1 + \dots + a_{1n}c_n}_{b_1} \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n = \underbrace{a_{p1}c_1 + \dots + a_{pn}c_n}_{b_p} \end{cases}$$

Paso a ecuaciones paramétricas:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} x_{p+1} = \lambda_{p+1} \\ \vdots \\ x_n = \lambda_n \\ x_1 = c_{1,p+1}\lambda_{p+1} + \dots + c_{n,p+1}\lambda_n \\ \vdots \\ x_p = c_{p,p+1}\lambda_{p+1} + \dots + c_{p,n}\lambda_n \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Se expresan en función} \\ \text{de las independientes} \end{array} \right.$$

Definición (Aplicación afín)

Sea $\varnothing: A \rightarrow A'$, A y A' espacios afines, $\lambda: V \rightarrow V'$ k -lineal

El par (\varnothing, λ) es una aplicación afín si $q = p + v \implies \varnothing(q) = \varnothing(p) + \lambda(v)$

$$v \xrightarrow{\lambda} \lambda(v) \implies \lambda \text{ está definida de manera única por } \varnothing \text{ de forma que } \lambda(\vec{pq}) = \overrightarrow{\varnothing(p)\varnothing(q)}$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ \parallel \\ \parallel \end{matrix} \quad \begin{matrix} \parallel \\ \parallel \\ \parallel \end{matrix} \quad \begin{matrix} \parallel \\ \parallel \\ \parallel \end{matrix}$$

Por comodidad, $\lambda = \vec{\varnothing}$ Aplicación lineal asociada

$\implies \varnothing: A \rightarrow A'$ es afín si $\vec{\varnothing}: V \rightarrow V'$ dada por $\vec{\varnothing}(\vec{pq}) = \overrightarrow{\varnothing(p)\varnothing(q)}$ es k -lineal

Ej: $\varnothing: A \rightarrow A'$, $\varnothing(p) = p'$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$\implies \varnothing(p) = p + v \equiv$ Traslación de vector v

Caso inverso: Dada la traslación $\vartheta(p) = p + v$, veamos ϑ es afín

Hay que ver que $\vec{\vartheta}$ es k -lineal:

$$\begin{aligned}\vec{\vartheta}(\vec{pq}) &= \overrightarrow{\vartheta(p)\vartheta(q)} = \overrightarrow{p+v, q+v} = \overrightarrow{p+v, (p+\vec{pq})+v} = \overrightarrow{p+v, p+(\vec{pq}+v)} \\ &= \overrightarrow{p+v, (p+v)+\vec{pq}} = \vec{pq} \implies \vartheta = \text{id}_V \text{ es lineal}\end{aligned}$$

\implies Todas las traslaciones son afines

Definición (Conjunto de puntos fijos A_ϑ)

Sea $\vartheta: A \rightarrow A$ afín.

$$A_\vartheta = \{ p \in A, \vartheta(p) = p \}$$

Ej: $\vartheta: A \rightarrow A, \vartheta(p) = p_0 \implies A_\vartheta = \{ p_0 \}$ (A_ϑ es variedad)

Ej: $\vartheta: A \rightarrow A$, traslación de vector $v \implies \left\{ \begin{array}{l} A_\vartheta = \emptyset, \text{ si } v \neq 0 \text{ (} A_\vartheta \text{ no es variedad)} \\ A_\vartheta = A, \text{ si } v = 0 \text{ (} A_\vartheta \text{ es variedad)} \end{array} \right.$

Proposición

Si $A_\vartheta \neq \emptyset \implies A_\vartheta$ es variedad y $\vec{A}_\vartheta = V_{\vec{\vartheta}, 1}$



Dem.

$A_\vartheta \neq \emptyset$. Veamos $A_\vartheta = p_0 + V_{\vec{\vartheta}, 1}$, donde $p_0 \in A_\vartheta$

Veamos $p_0 + V_{\vec{\vartheta}, 1} \subseteq A_\vartheta$

$$p = p_0 + v, v \in V_{\vec{\vartheta}, 1}, v = \overrightarrow{p_0 p}$$

$$p = p_0 + \overrightarrow{p_0 p} \implies \vartheta(p) = \vartheta(p_0) + \vec{\vartheta}(v) = p_0 + v = p \implies \vartheta(p) = p$$

Veamos $A_\vartheta \subseteq p_0 + V_{\vec{\vartheta}, 1}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

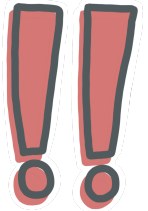
Cartagena99

Ej: $\emptyset: A \rightarrow A$

$\vec{\emptyset}: V \rightarrow V, \vec{\emptyset} = r \text{id}_V, r \neq 1$ ($\vec{\emptyset}$ homotecia)

\emptyset es afín

Puntos fijos de una homotecia



$\emptyset: A \rightarrow A, \vec{\emptyset} = r \text{id}_V, r \neq 0, 1, \emptyset$ es homotecia

Veamos que solo existe un punto fijo. ($A_{\emptyset} = \{c\}$)

Veamos $|A_{\emptyset}| \leq 1$ En caso de haber no hay más de uno

$$p, q \in A_{\emptyset} \Rightarrow r \vec{pq} = r \overrightarrow{\emptyset(p)\emptyset(q)} = r \overrightarrow{\emptyset(pq)} = r^2 \vec{pq} \Rightarrow r(1-r) \vec{pq} = 0$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\uparrow} \\ r \neq 0, 1 \end{array} \vec{pq} = 0 \Rightarrow p = q$$

Veamos que hay exactamente un punto fijo.

\circledast $c = p + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{p\emptyset(p)}$. Veamos c es fijo.

$$\begin{aligned} \emptyset(c) &= \emptyset(p) + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{\emptyset(p)\emptyset(\emptyset(p))} = p + \overrightarrow{p\emptyset(p)} + \frac{r}{1-r} \overrightarrow{p\emptyset(p)} \\ &= p + \overrightarrow{p\emptyset(p)} \left(1 + \frac{r}{1-r}\right) = p + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{p\emptyset(p)} \end{aligned}$$

Veamos como se llega a la fórmula del punto fijo. \circledast

$$\text{Sea } c \in A_{\emptyset}: r \vec{pc} = \vec{\emptyset(p)\emptyset(c)} = \overrightarrow{\emptyset(p)\emptyset(c)} = \overrightarrow{\emptyset(p)c} = \overrightarrow{\emptyset(p)p} + \vec{pc}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{p\emptyset(p)} = (1-r) \vec{pc} \Rightarrow \vec{pc} = \frac{1}{1-r} \overrightarrow{p\emptyset(p)} \Rightarrow c = p + \vec{pc} = p + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{p\emptyset(p)}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Matriz de una aplicación afín

$\emptyset: A \rightarrow A'$ afín, $R = \{p_0, B\}$, $R' = \{p_0', B'\}$, $\dim A = \dim V = n$, $\dim A' = \dim V' = m$
referencia en A referencia en A'

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $B' = \{v'_1, \dots, v'_m\}$

$$p \in A \Rightarrow \emptyset(p) \in A'$$

$$\emptyset(p_0) \in A'$$

$$p = (x_1, \dots, x_n)_R \Rightarrow \overrightarrow{p_0 p} = (x_1, \dots, x_n)_B$$

$$\emptyset(p_0) = (a_1, \dots, a_m)_{R'} \Rightarrow \overrightarrow{p_0' \emptyset(p_0)} = (a_1, \dots, a_m)_{B'}$$

$$\emptyset(p) = (x'_1, \dots, x'_m)_{R'} \Rightarrow \overrightarrow{p_0' \emptyset(p)} = (x'_1, \dots, x'_m)_{B'}$$

$$\overrightarrow{p_0' \emptyset(p)} = \overrightarrow{p_0' \emptyset(p_0)} + \overrightarrow{\emptyset(p_0) \emptyset(p)} = \overrightarrow{p_0' \emptyset(p_0)} + \overrightarrow{\emptyset(p_0 p)}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\emptyset(p_0 p)} = \overrightarrow{p_0' \emptyset(p)} - \overrightarrow{p_0' \emptyset(p_0)}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\emptyset((x_1, \dots, x_n)_B)} = (x'_1, \dots, x'_m)_{B'} - (a_1, \dots, a_m)_{B'} = (x'_1 - a_1, \dots, x'_m - a_m)_{B'}$$

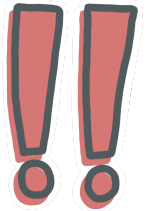
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x'_1 - a_1 \\ \vdots \\ x'_m - a_m \end{pmatrix} = M_{B', B'}(\overrightarrow{\emptyset}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} + M_{B', B'}(\overrightarrow{\emptyset}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & & & \\ \vdots & & & \\ a_m & & & \end{pmatrix}}_{M_{R, R'}(\emptyset)} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ej: \emptyset constante, $R = \{p_0, B\}$, $R' = \{p_0', B'\}$, $p_0' = \emptyset(p_0)$

$$\downarrow$$

$$M_{R, R'}(\emptyset) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Ej: \emptyset traslación, $R = \{p_0, B\}$

$$\vec{\emptyset} = \text{idv}$$

Si elegimos como primer vector de la base el vector de la traslación

$$M_R(\emptyset) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_1 & & & \\ \vdots & & & \\ a_n & & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 1 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

$$p_0 \emptyset(p_0) = (a_1, \dots, a_n)_B \neq (0, \dots, 0)_B$$

No existe ningún punto fijo

$$\Rightarrow p_0 \emptyset(p_0) = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

Vector de la traslación

Ej: \emptyset homotecia de razón $r \neq 0, 1$ con centro c

$$\vec{\emptyset} = r \text{idv}, \quad R = \{c, B\}$$

$$M_R(\emptyset) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ r I_n \\ \\ \end{array}$$

$c \emptyset(c) = 0$

Si no conociéramos el punto fijo c :

$$M_R(\emptyset) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_1 & & & \\ \vdots & & & \\ a_n & & & \end{array} \right) = A$$

$$(x_1, \dots, x_n)_R \in A_\emptyset \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a_1 + r x_1 \\ x_2 = a_2 + r x_2 \\ \vdots \\ x_n = a_n + r x_n \end{cases} \Rightarrow (1-r) x_i = a_i$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{a_i}{1-r}$$



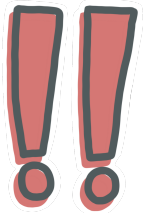
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Proyecciones afines

$\emptyset: A \rightarrow A$ afín

Veamos $\emptyset^2 = \emptyset \iff \vec{\emptyset}^2 = \vec{\emptyset}$ y $A_\emptyset \neq \emptyset$



$$\begin{aligned} \implies \emptyset^2 = \emptyset &\implies \vec{\emptyset}^2 = \vec{\emptyset} \circ \vec{\emptyset} = \vec{\emptyset}^2 = \vec{\emptyset} \\ &\quad \uparrow \\ &\overrightarrow{\psi \circ \emptyset(pq)} = \overrightarrow{(\psi \circ \emptyset)(p) (\psi \circ \emptyset)(q)} = \overrightarrow{\psi(\emptyset(p)) \psi(\emptyset(q))} \\ &= \overrightarrow{\psi(\overrightarrow{\emptyset(p) \emptyset(q)})} = \overrightarrow{\psi(\vec{\emptyset}(pq))} \end{aligned}$$

¿ $A_\emptyset \neq \emptyset$?

$$\forall p \in A, \emptyset(\emptyset(p)) = \emptyset(p) \implies \emptyset(p) \in A_\emptyset \implies \left\{ \begin{array}{l} A_\emptyset \neq \emptyset \\ \text{Im}(\emptyset) \subseteq A \text{ y si } p \in A_\emptyset \\ \implies p = \emptyset(p) \in \text{Im} \emptyset \\ \implies \text{Im}(\emptyset) = A_\emptyset \end{array} \right.$$

\Leftarrow Sea $p_0 \in A_\emptyset, p \in A$

$$p = p_0 + v, v = \overrightarrow{p_0 p}$$

$$\emptyset(p) = \emptyset(p_0) + \vec{\emptyset}(v) = p_0 + \vec{\emptyset}(v)$$

$$\left. \begin{aligned} \emptyset^2(p) &= \emptyset^2(p_0) + \vec{\emptyset}^2(v) = p_0 + \vec{\emptyset}^2(v) = p_0 + \vec{\emptyset}(v) \end{aligned} \right\} \implies \emptyset^2 = \emptyset$$

Matriz canónica de una proyección

$\emptyset: A \rightarrow A$ afín, $\emptyset^2 = \emptyset$ (\emptyset proyección)

$$R = \{ p_0, B \}, p_0 \in A_\emptyset, B = \{ \underbrace{v_1, \dots, v_m}_{\text{Im} \emptyset}, \underbrace{v_{m+1}, \dots, v_n}_{\text{Ker} \emptyset} \}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Justificación geométrica de la proyección

$\vec{\theta} : V \rightarrow V$ es proyección vectorial con base $V_{\vec{\theta},1}$ y dirección $V_{\vec{\theta},0}$

$$\vec{\theta} \text{ base } A_{\vec{\theta}} = \begin{cases} \text{Im}(\vec{\theta}) \\ p_0 + V_{\vec{\theta},1}, p_0 \in A_{\vec{\theta}} \end{cases}, \quad \vec{\theta} \text{ dirección } V_{\vec{\theta},0}$$

Veamos $\{\vec{\theta}(p)\} = A_{\vec{\theta}} \cap (p + V_{\vec{\theta},0})$

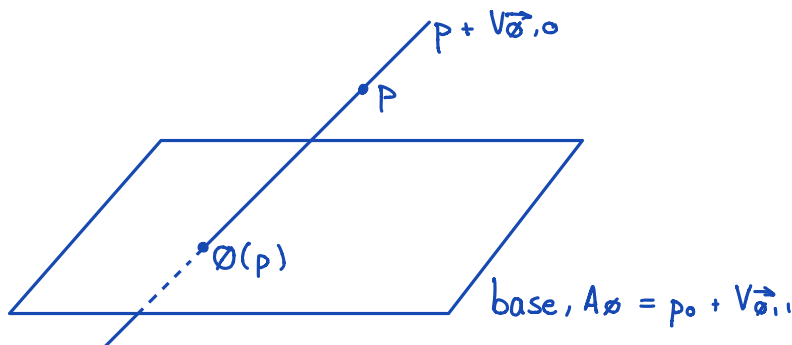
$$\subseteq \vec{\theta}(p) \in \text{Im}(\vec{\theta}) = A_{\vec{\theta}}$$

$$\vec{\theta}(\overrightarrow{p\vec{\theta}(p)}) = \vec{\theta}(p)\vec{\theta}^2(p) = \vec{\theta}(p)\vec{\theta}(p) = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{p\vec{\theta}(p)} \in V_{\vec{\theta},0} \Rightarrow \vec{\theta}(p) = p + \overrightarrow{p\vec{\theta}(p)} \in p + V_{\vec{\theta},0}$$

$$\subseteq A_{\vec{\theta}} \cap (p + V_{\vec{\theta},0}) \neq \emptyset \Rightarrow A_{\vec{\theta}} \cap (p + V_{\vec{\theta},0}) \text{ es variedad}$$

$$\begin{aligned} \dim(A_{\vec{\theta}} \cap (p + V_{\vec{\theta},0})) &= \dim(\overrightarrow{A_{\vec{\theta}} \cap (p + V_{\vec{\theta},0)}}) = \dim(\overrightarrow{A_{\vec{\theta}} \cap (p + V_{\vec{\theta},0)}}) \\ &= \dim(V_{\vec{\theta},1} \cap V_{\vec{\theta},0}) = 0 \end{aligned}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Simetrías afines



$$\vartheta: A \rightarrow A \text{ afín}$$

Veamos $\vartheta^2 = id_A \iff \vec{\vartheta}^2 = id_V$ y $A_\vartheta \neq \emptyset$

Dem.

$$\implies | id_V = id_A = \vec{\vartheta} \circ \vec{\vartheta} = \vec{\vartheta} \circ \vec{\vartheta} \implies \vec{\vartheta}^2 = id_V$$

Veamos $A_\vartheta \neq \emptyset$. Sea $\chi(K) \neq 2$

$$p \in A \implies m = p + \frac{1}{2} \overrightarrow{p\vartheta(p)}$$

$$\begin{aligned} \vartheta(m) &= \vartheta(p) + \frac{1}{2} \vec{\vartheta}(\overrightarrow{p\vartheta(p)}) = p + \overrightarrow{p\vartheta(p)} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\vartheta(p)\vartheta^2(p)} \\ &= p + \overrightarrow{p\vartheta(p)} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\vartheta(p)p} = p + \overrightarrow{p\vartheta(p)} - \frac{1}{2} \overrightarrow{p\vartheta(p)} = m \end{aligned}$$

$$\longleftarrow p_0 \in A_\vartheta, p = p_0 + v, v = \overrightarrow{p_0 p}$$

$$\vartheta^2(p) = \vartheta^2(p_0) + \vec{\vartheta}^2(v) = p_0 + id_V(v) = p_0 + v = p$$

Matriz canónica de una simetría

$$\vartheta: A \rightarrow A \text{ afín}, \vartheta^2 = id_A$$

$$R = \{p_0, B\}, p_0 \in A_\vartheta, B = \underbrace{\{v_1, \dots, v_m\}}_{\in V_{\vartheta,1}} \cup \underbrace{\{v_{m+1}, \dots, v_n\}}_{\in V_{\vartheta,-1}}$$

$$M_R(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Justificación geométrica de la simetría

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

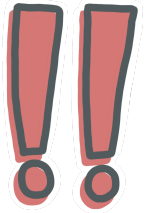
Homologías generales

$\emptyset: A \rightarrow A$ es homología (general) si $p_{\emptyset} = (x-1)(x-r)$, $r \neq 1, 0, -1$ y $A_{\emptyset} \neq \emptyset$

$R = \{p_0, B\}$, $p_0 \in A_{\emptyset}$, $B = \{ \underbrace{v_1, \dots, v_m}_{\in V_{\emptyset,1}}, \underbrace{v_{m+1}, \dots, v_n}_{\in V_{\emptyset,r}} \}$

$$M_R(\emptyset) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & r \end{array} \right)$$

$$x_i = \begin{cases} x_i, & 1 \leq i \leq m \\ rx_i, & m+1 \leq i \leq n \end{cases}$$



Llamamos a r la RAZÓN

$\underbrace{p_0 + L(v_1, \dots, v_m)}_{A_{\emptyset}} = p_0 + V_{\emptyset,1}$ es la BASE

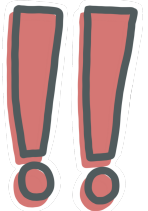
$L(v_{m+1}, \dots, v_n) = V_{\emptyset,r}$ es la dirección

Si la base es un hiperplano, la matriz contiene solo una r

\Rightarrow Toda homología general es composición de r homologías generales con base hiperplano.

Proposición

$A_{\emptyset} = \{p_0\} \iff 1 \notin \sigma(\emptyset)$



Dem.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \implies (A - I_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A_{\emptyset} = \{p_0\} \iff \text{rg}(A - I_n) = n \iff p_A(1) = |A - I_n| \neq 0 \iff 1 \notin \sigma(\emptyset)$

OBS

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$\{ x_1 = 1 + x_1 \text{ es imposible} \Rightarrow A_{\emptyset} = \emptyset \text{ y } q_{\emptyset} = (x-1)(x-r)$

Proposición (Inyectividad, suprayectividad y biyectividad de aplicaciones afines)

$$(\varnothing, \lambda), \varnothing: A_1 \rightarrow A_2, \lambda: V_1 \rightarrow V_2, \lambda = \overrightarrow{\varnothing}, \lambda(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\varnothing(p)\varnothing(q)} = \overrightarrow{\varnothing}(\overrightarrow{pq})$$

Veamos \varnothing es inyectiva / suprayectiva / biyectiva $\Leftrightarrow \lambda$ es inyectiva / suprayectiva / biyectiva

Dem.

Veamos la inyectividad

$$\Rightarrow \lambda(\overrightarrow{pq}) = \lambda(\overrightarrow{pr}) \Rightarrow \varnothing(q) = \varnothing(p) + \lambda(\overrightarrow{pq}) = \varnothing(p) + \lambda(\overrightarrow{pr}) = \varnothing(r)$$

$$\begin{array}{ccc} \Rightarrow q = r \Rightarrow \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pr} \\ \uparrow \text{ } \downarrow \\ \varnothing \text{ inyectiva} \quad \text{Ker}(\lambda) = \{0\} \end{array}$$

$$\Leftarrow \varnothing(q) = \varnothing(r) \Rightarrow \lambda(\overrightarrow{qr}) = \overrightarrow{\varnothing(q)\varnothing(r)} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{qr} = 0 \Rightarrow q = r$$

Notación (Grupo afín)

$$GA(A) = \{ \varnothing: A \rightarrow A, \varnothing \text{ es afín y biyectiva} \}$$

||| Grupo afín del espacio afín A \downarrow $\overrightarrow{\varnothing}$ biyectiva ($0 \notin \sigma(\overrightarrow{\varnothing})$)

OBS

El nombre viene de que $GA(A)$ es efectivamente un grupo.

$$\varnothing_1, \varnothing_2 \in GA(A) \Rightarrow \begin{cases} \varnothing_1 \circ \varnothing_2 \in GA(A) \\ \varnothing_1^{-1}, \varnothing_2^{-1} \in GA(A) \quad (\overrightarrow{\varnothing} \circ \overrightarrow{\varnothing}^{-1} = id_V) \end{cases}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Clasificación del grupo afín en el plano

$\dim A = 2$

CASO I: $K = \mathbb{C}$

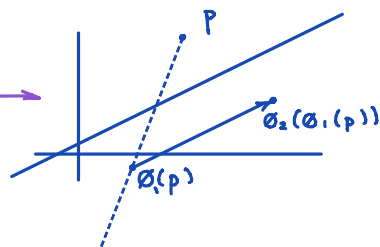
$1 \in \sigma(\vec{\theta})$:

$- q_{\vec{\theta}} = (x-1) \Rightarrow \vec{\theta}$ traslación $\Rightarrow \begin{cases} \vec{\theta} = \text{id}_A (A_{\vec{\theta}} = A) \\ \vec{\theta} \neq \text{id}_A (A_{\vec{\theta}} = \emptyset) \end{cases}$

$- q_{\vec{\theta}} = (x-1)(x-r), r \neq 1, 0, -1 \Rightarrow \vec{\theta}$ diagonalizable $\Rightarrow \begin{cases} \vec{\theta}$ homología general, si $A_{\vec{\theta}} \neq \emptyset$ \\ \circledast $\vec{\theta}$ homología general con desplazamiento, si $A_{\vec{\theta}} = \emptyset$ \end{cases}

$\circledast M_R(\vec{\theta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & r \end{pmatrix} = M_R(\vec{\theta}_2 \circ \vec{\theta}_1) \Rightarrow \vec{\theta} = \vec{\theta}_2 \circ \vec{\theta}_1$
 $B = \{v_1, v_2\}, (a_1, a_2) \neq (0,0)$
 (Arrows point from $\vec{\theta}_2$ to $\vec{\theta}_2$ labeled "traslación" and from $\vec{\theta}_1$ to $\vec{\theta}_1$ labeled "homología")

$- q_{\vec{\theta}} = (x-1)(x+1) \Rightarrow \begin{cases} \vec{\theta}$ es simetría, si $A_{\vec{\theta}} \neq \emptyset$ \\ $\vec{\theta}$ es simetría con desplazamiento, si $A_{\vec{\theta}} = \emptyset$ \end{cases}



$- q_{\vec{\theta}} = (x-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} A_{\vec{\theta}} \neq \emptyset \Rightarrow \vec{\theta}$ es homología especial \\ $A_{\vec{\theta}} = \emptyset \Rightarrow \vec{\theta}$ es homología especial con desplazamiento \end{cases}

$\circledast R = \langle p_0, B \rangle, p_0 \in A_{\vec{\theta}}, B$ base de Jordan

$M_R(\vec{\theta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, base = $A_{\vec{\theta}} = p_0 + V_{\vec{\theta},1} = p_0 + L(v_1)$ (eje)
 dirección = $L(v_2)$

$\circledast M_R(\vec{\theta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 1 \\ a_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_R(\vec{\theta}_2 \circ \vec{\theta}_1)$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

• $1 \notin \sigma(\vec{\theta}) : A_{\vec{\theta}} = \{p_0\} \implies R = \{p_0, B\}$

- $q_{\vec{\theta}} = x - r, r \neq 1, 0 \implies \vec{\theta} = r \text{id}_V \implies \vec{\theta}$ homotecia de razón r y centro p_0

- $q_{\vec{\theta}} = (x-r)(x-s), r, s \neq 1, 0 \implies M_R(\vec{\theta}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & s \end{array} \right)$ } $x = rx$
 $y = ry$

$\vec{\theta}$ diagonalizable
 $B = \{v_1, v_2\}$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $v_{\vec{\theta}, r} \quad v_{\vec{\theta}, s}$

$M_R(\vec{\theta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(\vec{\theta}_2 \circ \vec{\theta}_1), \vec{\theta}_1, \vec{\theta}_2$ homología general (base y dirección cambian)

- $q_{\vec{\theta}} = (x-r)^2, r \neq 1, 0:$

$M_R(\vec{\theta}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & r & 1 \\ 0 & 0 & r \end{array} \right), M_{R'}(\vec{\theta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & r \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\implies \vec{\theta}$ es homología especial compuesta con homotecia

CASO 2: $K = \mathbb{R}$

Solo hay un caso nuevo:

- $q_{\vec{\theta}} = x^2 + a, x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ irreducible

$= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2), \alpha = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \implies M_B(\vec{\theta}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

$\implies M_R(\vec{\theta}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{array} \right)$
 \uparrow
 $A_{\vec{\theta}} = \{p_0\}$

OBS

Toda afinidad es composición de una afinidad con suaves fijos y una traslación.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Teorema

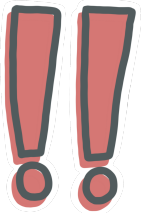
A, A' espacios afines, $p_0 \in A, \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V .

Por tanto, $p_0' \in A', v_1', \dots, v_n' \in V'$

$\exists ! \vartheta : A \rightarrow A'$ afín tal que $\vartheta(p_0) = p_0'$ y $\vartheta(v_i) = v_i', \forall i = 1, \dots, n$

Dem.

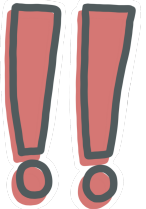
$$p \in A, p = p_0 + \sum_{i=1}^n a_i v_i \implies \vartheta(p) = p_0' + \sum_{i=1}^n a_i v_i'$$



Teorema

A, A' espacios afines, $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ sistema de referencia afín de A .

$\forall p_0', p_1', \dots, p_n' \in A', \exists ! \vartheta : A \rightarrow A'$ afín tal que $\vartheta(p_i) = p_i', \forall i = 0, 1, \dots, n$



Isomorfismo de espacios afines

A, A' espacios afines, $A \stackrel{\vartheta}{\cong} A' \implies V \stackrel{\vec{\vartheta}}{\cong} V' \implies \dim V = \dim V'$

$\dim V = \dim V' \implies \exists \lambda : V \rightarrow V'$ isomorfismo

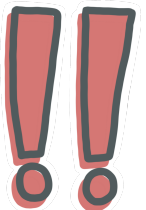
$p_0 \in A, p_0' \in A' \implies \exists ! \vartheta : A \rightarrow A'$ tal que $\left\{ \begin{array}{l} \vartheta(p_0) = p_0' \\ \vec{\vartheta} = \lambda \end{array} \right.$

$\implies A \cong A' \iff V \cong V' \iff \dim V = \dim V'$

Variedades invariantes

$\vartheta : A \rightarrow A'$ afín, $X = p + \vec{X}$ variedad

$$X \subset_{\vartheta} A \iff \left\{ \begin{array}{l} p \vartheta(p) \in X \\ \vec{X} \subset_{\vec{\vartheta}} V \end{array} \right.$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cónicas

$A = \mathbb{R}^2$ plano afín real usual

C cónica si $\emptyset \neq C = \{ p = (x, y)_{\mathbb{R}} \mid 0 = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} \}$
 $a_{11}x^2 + \dots + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} \in \mathbb{R}[X, Y]$

Veamos que cambiando de sistema de referencia se obtiene otro polinomio asociado.

$$C: 0 = (1 \ x \ y) A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = M_{\mathbb{R}}(C) = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$P = M(\mathbb{R}', \mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad p = (x', y')_{\mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow 0 = (1 \ x' \ y') \underbrace{P^t A P}_{A' = M_{\mathbb{R}'}(C)} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = (1 \ x' \ y') \begin{pmatrix} a'_{00} & a'_{01} & a'_{02} \\ a'_{01} & a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{02} & a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 0 = a'_{11}x'^2 + \dots + a'_{00}$ Seguimos teniendo un polinomio cuadrático

C no es una variedad afín

Sea $A' = M_{\mathbb{R}'}(C')$ Una nueva cónica
↓

Definición (Cónicas afinmente equivalentes)

C y C' son afinmente equivalentes ($C \sim C'$) si $M_{\mathbb{R}}(C) = M_{\mathbb{R}'}(C')$

↑
Es relación de equivalencia.

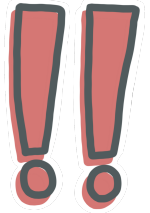
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Teorema de clasificación de cónicas

Toda cónica real es afinmente equivalente a una y solo una de las siguientes



- 1) $x^2 + y^2 - 1 = 0 \equiv$ Elipse no degenerada
- 2) $x^2 - y^2 - 1 = 0 \equiv$ Hipérbola no degenerada
- 3) $x^2 - y = 0 \equiv$ Parábola no degenerada
- 4) $x^2 + y^2 = 0 \equiv$ Elipse degenerada (Solo la verifica el $(0,0)_R$)
- 5) $x^2 - y^2 = 0 \equiv$ Hipérbola degenerada
- 6) $x^2 - 1 = 0 \equiv$ Parábola simplemente degenerada
- 7) $x^2 = 0 \equiv$ Parábola doblemente degenerada

Dem.

$$0 = (x \ y) A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \left(\begin{array}{c|cc} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ \hline a_{01} & A_0 & \\ a_{02} & & \end{array} \right), \quad A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ Parte cuadrática}$$
$$= (x \ y) A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(a_{01} \ a_{02}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{00} \quad A_0 = M_B(q_0) *$$

$$* K = \mathbb{R} \xrightarrow[\text{Inercia}]{\text{Ley de}} A_0 \equiv A_0' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i = 1, -1, 0$$

$$A_0 = P^t A_0' P, \quad P = M(B, B'), \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \implies 0 &= (x \ y) P^t A_0' P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(a_{01} \ a_{02}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{00} \\ &= (x' \ y') A_0' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2(a_{01} \ a_{02}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{00} \\ &= \varepsilon_1 (x')^2 + \varepsilon_2 (y')^2 + 2(a_{01} \ a_{02}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{00} \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Si ambos son -1 podemos multiplicar

$$\varepsilon_1 = 1$$

$$\cdot \varepsilon_2 = 1 :$$

$$(x')^2 + (y')^2 + 2a'_{01}x' + 2a'_{02}y' + a'_{00} = (x' + a'_{01})^2 + (y' + a'_{02})^2 + \underbrace{a'_{00} - a'_{01}{}^2 - a'_{02}{}^2}_{a''_{00}}$$

$$\textcircled{*} \left. \begin{array}{l} x''^2 + y''^2 - 1, \text{ si } a''_{00} < 0 \textcircled{*} \\ x''^2 + y''^2, \text{ si } a''_{00} = 0 \\ \text{no es cónica}, \text{ si } a''_{00} > 0 \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{*} a''_{00} < 0 \Rightarrow -a''_{00} > 0 \Rightarrow \exists \sqrt{-a''_{00}} \in \mathbb{R} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x'' = \frac{(x' + a'_{01})}{\sqrt{-a''_{00}}} \\ y'' = \frac{(y' + a'_{02})}{\sqrt{-a''_{00}}} \end{array} \right.$$

$$\textcircled{*} (x' + a'_{01})^2 + (y' + a'_{02})^2 + a'_{00} = x''^2 + y''^2 + a''_{00}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a'_{01} & 1 & 0 \\ a'_{02} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$M(R', R''), R'' = \{p_0'', B''\}, M(B', B'') = I_2 \Rightarrow B' = B''$$

$$\overrightarrow{p_0''} \overrightarrow{p_0'} = a'_{01}v_1'' + a'_{02}v_2'' = a'_{01}v_1' + a'_{02}v_2' \neq 0$$

$$\Rightarrow p_0'' = (-a'_{01}, -a'_{02})_{R'}$$

$$\cdot \varepsilon_2 = -1 :$$

$$(x')^2 - (y')^2 + 2a'_{01}x' + 2a'_{02}y' + a'_{00} = (x' + a'_{01})^2 - (y' - a'_{02})^2 + \underbrace{a'_{00} - a'_{01}{}^2 + a'_{02}{}^2}_{a_0''}$$

$$= \begin{cases} x''^2 - y''^2 - 1, \text{ si } a_0'' < 0 \\ x''^2 - y''^2, \text{ si } a_0'' = 0 \\ x''^2 - y''^2 + 1, \text{ si } a_0'' > 0 \end{cases}, \text{ que cambiando de sistema de referencia es igual al primer caso.}$$

Lo que estamos haciendo se basa en un cambio de sistema de referencia:

$$0 = a_{11}x^2 + \dots + a_{00} = \varepsilon_1 x'^2 + \varepsilon_2 y'^2 + 2a'_{01}x' + 2a'_{02}y' + a'_{00}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M(B', B'') \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}, B' = M(B', B'') \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

· $\varepsilon_2 = 0$:

$$(x')^2 + 2a'_{01} x + 2a'_{02} y + a''_{00} = (x' + a'_{01})^2 + 2a'_{02} y' + a''_{00} = x''^2 + 2a'_{02} y + a''_{00}$$

· $a'_{02} \neq 0 \implies x''^2 - (-2a'_{02} y - a''_{00}) = x''^2 - y''$

$$x'' = x' + a'_{01}, \quad y'' = -2a'_{02} y - a''_{00}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a'_{01} & 1 & 0 \\ -a''_{00} & 0 & -2a'_{02} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} . \text{ La matriz es de cambio de referencia}$$

$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2a'_{02} \end{pmatrix}$ es invertible

· $a'_{02} = 0 \implies 0 = x''^2 + a''_{00} = \begin{cases} x''^2 - 1, & \text{si } a''_{00} < 0 & \text{Rectas paralelas} \\ x''^2, & \text{si } a''_{00} = 0 & \text{Recta doble} \\ \text{no es cónica,} & \text{si } a''_{00} > 0 \end{cases}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

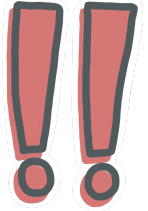
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Clasificación de cónicas por invariantes

Sea C cónica

$$A = M_R(C), A' = M_{R'}(C), A' = P^t A P, P = M(R', R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & & \\ c_2 & & \end{pmatrix}, P_0 = M(B', B)$$

$$A' = \left(\begin{array}{c|ccc} a'_{00} & a'_{01} & a'_{02} & \\ \hline a'_{01} & & & A'_0 \\ a'_{02} & & & \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_2 \\ 0 & & \\ 0 & & P_0^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & & A_0 \\ a_{02} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & & \\ c_2 & & P_0 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow A \equiv A' \Rightarrow \underset{r}{\text{rg}}(A) = \underset{r'}{\text{rg}}(A'), \quad \underset{(s,t)}{\varepsilon}(A) = \underset{(s',t')}{\varepsilon}(A'), \quad \text{signo}(|A|) = \text{signo}(|A'|)$$

Al multiplicar por -1 , el rango no cambia pero ε sí. lo que es invariante es $\delta = |s-t|$

$$A'_0 = P_0^t A_0 P_0 \Rightarrow A_0 \equiv A'_0 \Rightarrow r_0 = r'_0, \delta_0 = \delta'_0, \text{signo}(|A_0|) = \text{signo}(|A'_0|)$$

• C elipse no degenerada:

$$A \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{r=3, \delta=1, d<0, r_0=2, \delta_0=2, d_0>0}$$

• C elipse degenerada:

$$A \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{r=2, \delta=2, d=0, r_0=2, \delta_0=2, d_0>0}$$

• C hipérbola no degenerada:

$$A \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \underline{r=3, \delta=1, d>0, r_0=2, \delta_0=0, d_0<0}$$

• C hipérbola degenerada:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• C parábola simplemente degenerada:

$$A \equiv \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \underline{r=2, \delta=0, d=0, r_0=1, \delta_0=1, d_0=0}$$

• C parábola doblemente degenerada:

$$A \equiv \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \underline{r=1, \delta=1, d=0, r_0=1, \delta_0=1, d_0=0}$$

Aplicaciones entre cónicas



Sea C cónica

$$A = M_R(C), A' = M_{R'}(C), A' = P^t A P, P = M(R, R')$$

$$p \in C, p = (x, y)_R, p = (x', y')_{R'}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, P = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline c_1 & M(B_1 B') \\ c_2 & \uparrow \\ & P_0 \text{ inversible} \end{array} \right) = M_R(\emptyset), \emptyset(x, y)_R = (x', y')_{R'} \textcircled{R}$$

$$p = (x', y')_{R'}$$

$$\emptyset(p) = (x', y')_R$$

$$0 = (1 \ x \ y) A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = (1 \ x' \ y') A' \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}, A = M_R(C), A' = M_{R'}(C')$$

\uparrow
 $a'_{11}x'^2 + \dots + a'_{00}$

$$\Rightarrow (x', y')_{R'} \in C' \Rightarrow \emptyset(x, y)_R \in C'$$

Además, $\vec{\emptyset}$ es INVERSIBLE

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\text{Ej: } 0 = 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4x + 4y + 2 = 5\left(x + \frac{3y}{5} - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{9y^2}{5} - \frac{4}{5} + \frac{12y}{5} + 5y^2 + 4y + 2$$

(en \mathbb{R}^2)

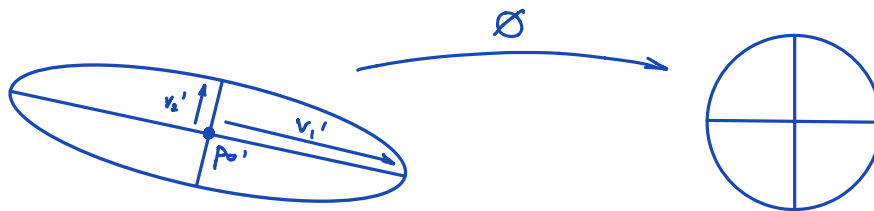
$$= 5x'^2 + \frac{16}{5}y^2 + \frac{32}{5}y + \frac{6}{5} = 5x'^2 + \frac{16}{5}(y+1)^2 - 2 = 5x'^2 + \frac{16}{5}y'^2 - 2$$

$$x' = x + \frac{3y}{5} - \frac{2}{5}, \quad y' = y + 1, \quad d_0 > 0, \quad r = 3 \implies \text{Elipse no degenerada}$$

$$\implies x''^2 + y''^2 - 1 = 0 \cdot \begin{cases} x'' = \sqrt{\frac{8}{5}} x' = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(x + \frac{3y}{5} - \frac{2}{5}\right) \\ y'' = \sqrt{\frac{8}{5}} y' = \sqrt{\frac{8}{5}} (y + 1) \end{cases}$$

$$\emptyset: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$M_{\mathbb{R}^2}(\emptyset) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5}\sqrt{\frac{8}{5}} & \sqrt{\frac{8}{5}} & \frac{3}{5}\sqrt{\frac{8}{5}} \\ \hline \sqrt{\frac{8}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{8}{5}} \end{array} \right)$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70